Pol-Polaren-Beziehung
am Dreieck

Eckart Schmidt

Zu einem Punkt P der Ebene eines Bezugsdreiecks ABC wird das Ceva-Dreieck $P_aP_bP_c$ betrachtet. Die Perspektivachse dieser beiden Dreiecke sei die Polare von P bzgl. ABC, kurz als Tripolare (trilinear polar [1]*) angesprochen. Diese Pol-Polaren-Beziehung bzgl. eines Bezugsdreiecks ist Thema der Ausarbeitung. Dazu werden auch Ortslinien der Tripole zu Geraden-Mengen sowie Einhüllende der Tripolaren zu Punkt-Mengen untersucht. – Gearbeitet wird mit baryzentrischen Koordinaten.*

1. Tripol, Tripolare

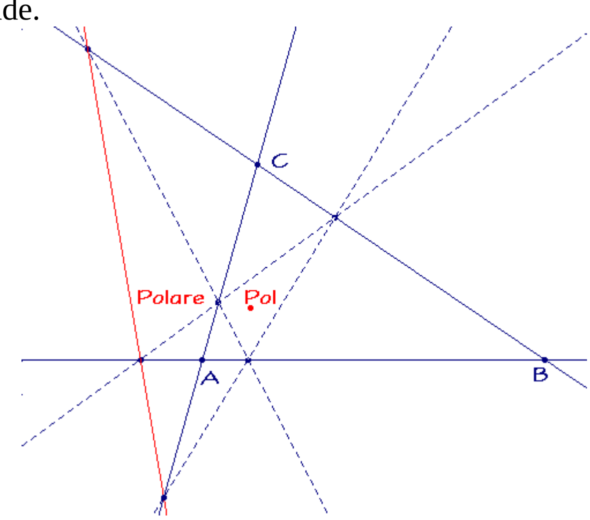
Die Schnittpunkte der Ecktransversalen eines Punktes $P(u:v:w)$ mit den Gegenseiten ergeben die Ecken des Ceva-Dreiecks von *P*:

$$P_a(0:v:w),\quad P_b(u:0:w),\quad P_c(u:v:0)\,.$$

Die Schnittpunkte der Geraden *AB*, P_aP_b, sowie *BC*, P_bP_c und *CA*, P_cP_a liegen kollinear auf der Tripolaren *p* von *P* mit der Gleichung

$$p:\quad vwx + wuy + uvz = 0\,.$$

Z.B. ist die Tripolare des Schwerpunktes $S(1:1:1)$ die Ferngerade.



Betrachtet man umgekehrt zu den Seiten-Schnittpunkten einer Geraden

$$g:\quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

die vierten harmonischen Punkte auf den Seiten

$$G_a(0:\gamma:\beta),\quad G_b(\gamma:0:\alpha),\quad G_c(\beta:\alpha:0)\,,$$

so erhält man die Ecken des Ceva-Dreiecks des Tripols

$$G(\beta\gamma:\gamma\alpha:\alpha\beta)$$

der Geraden *g*.

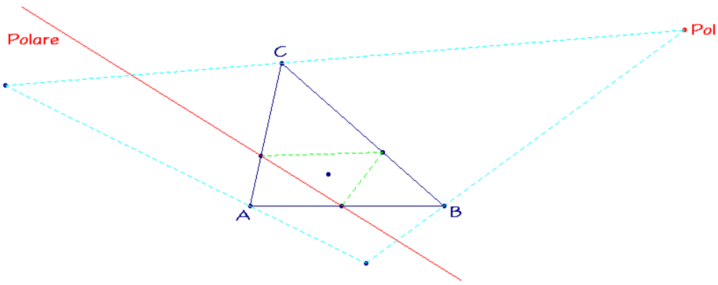
Beispiel: Die Lemoine-Gerade verbindet den Schwerpunkt *S* mit seinem isogonal-konjugierten Bild, dem Lemoine-Punkt $L(a^2 : b^2 : c^2)$:

$$SL: \quad b^2c^2x + c^2a^2y + a^2b^2z = 0 .$$

Der Tripol der Lemoine-Geraden ist der Steiner-Punkt *X(99)* des Dreiecks [2]:

$$((a^2 - b^2)(a^2 - c^2) : (b^2 - c^2)(b^2 - a^2) : (c^2 - b^2)(c^2 - a^2)) .$$

Satz 1. Zu einem Punkt *P* sei das Ceva-Dreieck $P_aP_bP_c$ und das Anti-Ceva-Dreieck $P^aP^bP^c$, dann ist die Tripolare von P^i die Verbindungsgerade P_jP_k.



Beweis: Zu $P^a(-u : v : w)$ hat die Tripolare die Gleichung

$$vwx - wuy - uvz = 0;$$

dies ist die Gleichung der Verbindungsgeraden von

$$P_b(u : 0 : w) \text{ und } P_c(u : v : 0) . \qquad \square$$

Beispiel: Die Tripolare des vierten Parallelogramm-Punktes zu *A, B, C* ist die Mittelparallele zu *AC*.

2. Tripole eines Geradenbüschels

Es liegt nahe, die Ortslinie der Tripole eines Geradenbüschels zu untersuchen.

Satz 2. Die Tripole der Geraden eines Büschels liegen auf einem Umkegelschnitt des Bezugsdreiecks, für den der Büschelpunkt und seine Tripolare ein Pol-Polaren-Paar sind.

Liegt der Büschel-Punkt innerhalb, auf oder außerhalb der einbeschriebenen Steiner-Ellipse, so ist der Umkegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel.

Beweis: Geraden durch den festen Punkt $P(u : v : w)$ in Richtung eines Fernpunktes $F(1 : \kappa : -1 - \kappa)$ haben die Gleichung

$$(v + v\kappa + w\kappa)x - (u + w + u\kappa)y + (v - u\kappa)z = 0$$

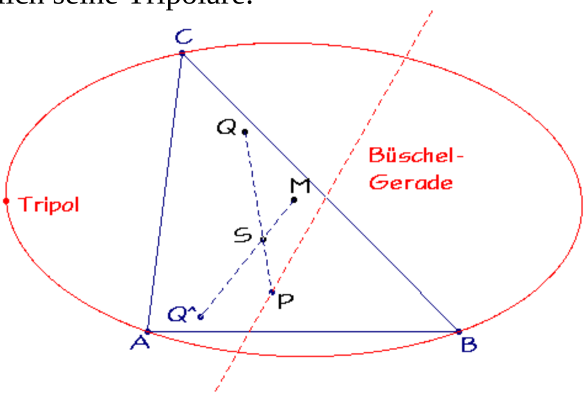
mit dem Tripol

$$T(-(v-u\kappa)(u+w+u\kappa)$$
$$:(v-u\kappa)(v+v\kappa+w\kappa) \qquad .$$
$$:-(u+w+u\kappa)(v+v\kappa+w\kappa))$$

Eliminiert man den Parameter κ, so erhält man die Gleichung eines Umkegelschnitts des Bezugsdreiecks mit der Gleichung

$$uyz+vzx+wxy=0\,.$$

Für diesen Umkegelschnitt ist die Polare des Punktes P offensichtlich seine Tripolare.



Streckt man P von Schwerpunkt mit dem Faktor –2:

$$Q(-u+v+w:u-v+w:u+v-w)\,,$$

bildet diesen Punkt isotom-konjugiert ab:

$$Q\hat{}\,(1/(-u+v+w):1/(u-v+w):1/(u+v-w))$$

und streckt jetzt vom Schwerpunkt mit dem Faktor –1/2, so erhält man das Zentrum des Umkegelschnitts:

$$M(u(-u+v+w):v(u-v+w):w(u+v-w))\,.$$

Für Fernpunkte $F(1:\kappa:-1-\kappa)$ auf diesem Kegelschnitt gilt

$$\kappa_{1,2}=-\frac{u+v-w\pm\sqrt{-4uv+(u+v-w)^2}}{2u}$$

Damit ist der Umkegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Radikand kleiner, gleich oder größer Null ist. Im Gleichheitsfall ist die Bedingung

$$u^2+v^2+w^2-2uv-2vw-2wu=0$$

die Gleichung der einbeschriebenen Steiner-Ellipse. □

Beispiele:
Die Tripole der Geraden durch den Schwerpunkt $X(2)=(1:1:1)$ liegen auf der umbeschriebenen Steiner-Ellipse.

Die Tripole der Geraden durch den Lemoine-Punkt $X(6)=(a^2:b^2:c^2)$ liegen auf dem Umkreis.

Die Tripole der Senkrechten zur Euler-Geraden, d.h. des Parallelen-Büschels durch den Fernpunkt

$$X(523)=(b^2-c^2:c^2-a^2:a^2-b^2)\,,$$

liegen auf der Kiepert-Hyperbel.

Der Umkegelschnitt aus Satz 2 mit der Gleichung

$$uyz+vzx+wxy=0$$

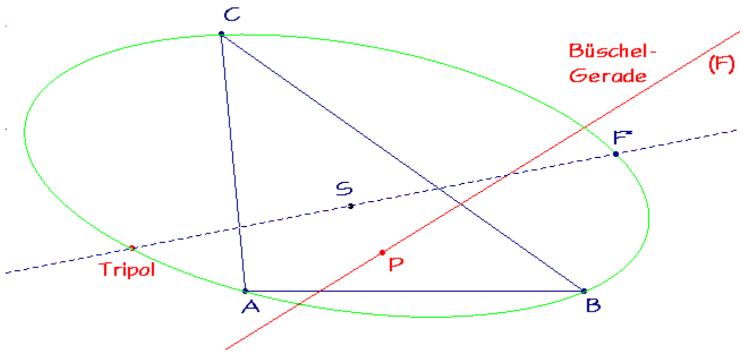
ist offensichtlich das Bild der Ferngeraden bei der Konjugation, die den Schwerpunkt S mit dem Büschel-Punkt P vertauscht:

$$X(x:y:z) \quad \xrightarrow[*]{} \quad X^*(uyz:vzx:wxy).$$

Diese Konjugation liefert für den Fernpunkt F einer Büschel-Geraden g

$$F^*(-\kappa(1+\kappa)u:-(1+\kappa)v:\kappa w).$$

F^* liegt mit dem Tripol von g (s.o.) und dem Schwerpunkt S kollinear.



Satz 3. **Der Umkegelschnitt aus Satz 2 ist das Bild der Ferngeraden bei der Konjugation, die den Büschel-Punkt mit dem Schwerpunkt vertauscht.**

Der Tripol einer Büschelgeraden und das konjugierte Bild ihres Fernpunktes liegen mit dem Schwerpunkt kollinear.

3. Einhüllende der Tripolaren zu kollinearen Punkten

Entsprechend stellt sich die Frage nach den Tripolaren zu Punkten einer Geraden

$$g: \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Satz 4: **Die Tripolaren der Punkte einer Geraden hüllen einen Berührkegelschnitt des Bezugsdreiecks ein, für den die Trägergerade und ihr Tripol ein Polaren-Pol-Paar sind.**

Liegt der Schwerpunkt mit einer, zwei oder allen drei Ecken des Bezugsdreiecks auf einer Seite der Trägergeraden, so ist der Berührkegelschnitt eine Außen-Ellipse, Hyperbel oder Innen-Ellipse; geht die Träger-Gerade durch den Schwerpunkt, so ergibt sich eine Parabel.

Beweis: Gibt man den Geradenpunkten Q die Parameterdarstellung

$$Q(\gamma:\gamma\kappa:-\alpha-\beta\kappa),$$

so haben die Tripolaren die Gleichungen

$$q: \quad -\kappa(\alpha+\beta\kappa)x-(\alpha+\beta\kappa)y+\gamma\kappa=0.$$

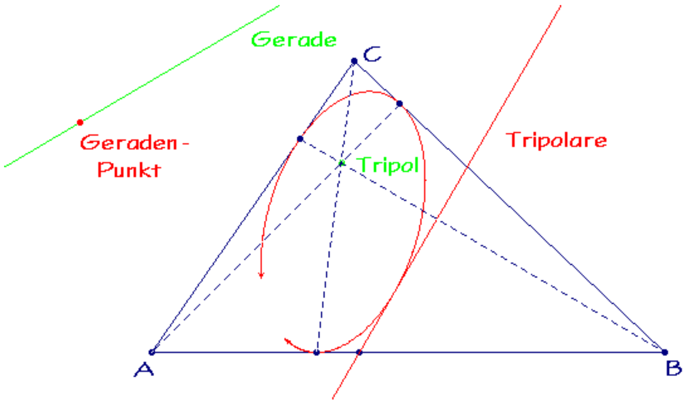
Hieraus ergibt sich für die Einhüllende der Tripolaren ein Berührkegelschnitt mit der Gleichung

$$\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2-2\alpha\beta xy-2\beta\gamma yz-2\gamma\alpha zx=0.$$

Die Berührpunkte

$$(0:\gamma:\beta),\quad (\gamma:0:\alpha),\quad (\beta:\alpha:0)$$

sind die Ecken des Ceva-Dreiecks des Brianchon-Punktes $(\beta\gamma:\gamma\alpha:\alpha\beta)$ des Berührkegelschnitts, der damit Pol und Tripol der Trägergeraden g ist.



Bildet man den Brianchon-Punkt isotom-konjugiert ab und streckt diesen Punkt vom Schwerpunkt mit dem Faktor –1/2, so erhält man das Zentrum des Berührkegelschnitts

$$N(\beta+\gamma:\gamma+\alpha:a+\beta)\,.$$

Für die Existenz von Fernpunkten auf dem Berührkegelschnitt muss gelten:

$$-\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\geq 0\,.$$

Für α, β, γ lassen sich die orientierten Abstände der Ecken A, B, C von der Trägergeraden benutzen; dabei bestimme der Schwerpunktsabstand σ das Vorzeichen. Dann gilt

$$\alpha+\beta+\gamma=3\sigma>0\ .$$

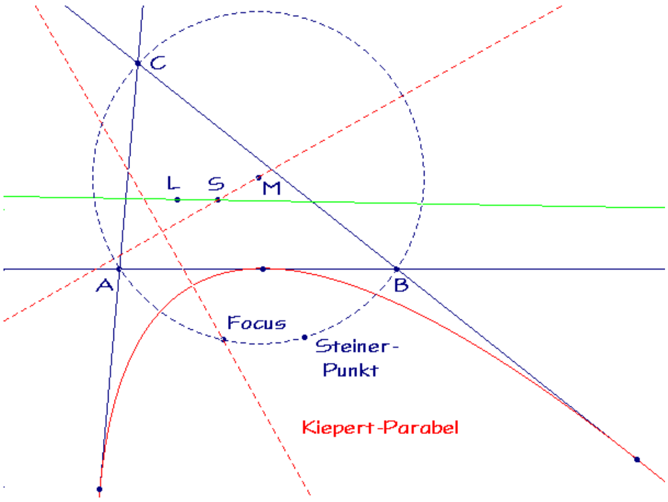
Für Geraden durch den Schwerpunkt ist $\alpha+\beta+\gamma=0$. Dann existiert genau ein Fernpunkt; dies ist der Parabelfall.
Liegt der Schwerpunkt mit A, B, C auf einer Seite der Trägergeraden, so sind α, β, γ positiv, d.h. $\alpha\beta\gamma>0$ und es existiert kein Fernpunkt. Brianchon-Punkt und Zentrum liegen innerhalb des Dreiecks, der Berührkegelschnitt ist eine Innen-Ellipse. Liegt der Schwerpunkt mit zwei Ecken auf einer Seite der Trägergeraden, so ist $\alpha\beta\gamma<0$ und es existieren zwei Fernpunkte, d.h. der Berührkegelschnitt ist eine Hyperbel. Liegt der Schwerpunkt nur mit einer Ecke auf einer Seite der Trägergeraden, so ist $\alpha\beta\gamma>0$ und es existiert kein Fernpunkt. Der Berührkegelschnitt ist eine Außen-Ellipse, da das Zentrum außerhalb des Dreiecks liegt. □

Beispiel: Betrachtet man die Lemoine-Gerade

$$SL:\quad b^2c^2x+c^2a^2y+a^2b^2z=0\,,$$

so erhält man als Einhüllende der Tripolaren ihrer Punkte die Kiepert-Parabel

$$b^4c^4x^2+c^4a^4y^2+a^4b^4z^2-2a^2b^2c^2(a^2yz+b^2zx+c^2xy)=0\,.$$



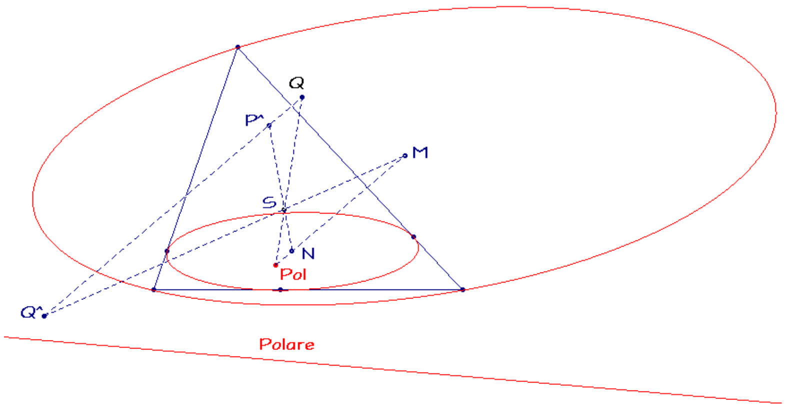
Brianchon-Punkt ist der Steiner-Punkt *X(99)*. Bildet man den Brianchon-Punkt erst isotom- dann isogonal-konjugiert ab, so erhält man auf dem Umkreis den Brennpunkt *X(110)*

$$(a^2(a^2-b^2)(a^2-c^2):b^2(b^2-c^2)(b^2-a^2):c^2(c^2-a^2)(c^2-b^2)) \ .$$

Leitlinie ist die Euler-Gerade. Steiner-Punkt und Lemoine-Gerade sind ein Pol-Polaren-Paar sowohl für das Dreieck als auch für die Kiepert-Parabel.

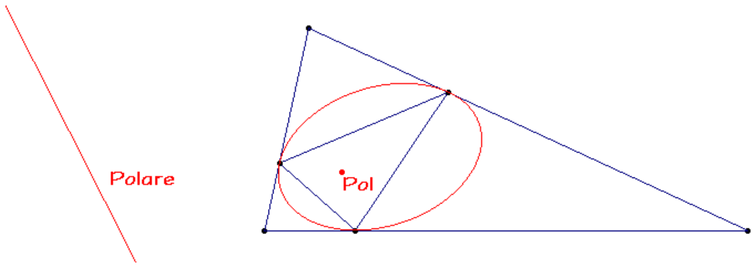
4. Zusammenschau

Die im Zusammenhang mit einem Pol *P* betrachteten Punkte ordnen sich zu Nagelschen Punkte-Paaren. Ergänzt man *P* durch seinen antikomplementären Punkt *Q* zu einem Nagelschen Punkte-Paar, so liegen die isotom-konjugierten Bilder *P^* und *Q^* mit *Q* kollinear und die komplementären Punkte von *P^* und *Q^* sind die Zentren der Kegelschnitte aus Satz 4 und Satz 2. Eine bekannte Konstellation dieser Art erhält man, wenn *P=X(1)* die Inkreismitte ist mit *Q=X(8)* Nagel-Punkt, *Q^=X(7)* Gergonne-Punkt, *M=X(9)* Mittenpunkt, *P^=X(75)*, *N=X(37)*.



Die Pol-Polaren-Beziehung eines Punktes erstreckt sich nicht nur auf das Bezugsdreieck:

Satz 5. Die Tripolare eines Punktes *P* bzgl. des Bezugsdreiecks *ABC* ist auch die Tripolare bzgl. des Ceva- und Anti-Ceva-Dreiecks des Punktes *P*.



Beweis: Es reicht der Beweis für das Ceva-Dreieck $P_aP_bP_c$. Die Ecken des Ceva-Dreiecks von P bzgl. $P_aP_bP_c$ sind

$$P_a´(2u:v:w),\quad P_b´(u:2v:w),\quad P_c´(u:v:2w).$$

Die Schnittpunkte entsprechender Seitengeraden von $P_aP_bP_c$ und $P_a´P_b´P_c´$ liegen kollinear auf der Tripolaren von P bzgl. ABC.
Damit ist der Umkegelschnitt aus Satz 2 derjenige, der auch Berührkegelschnitt des Anti-Ceva-Dreiecks von P ist, und der Berührkegelschnitt aus Satz 4 derjenige, der auch Umkegelschnitt des Ceva-Dreiecks von P ist. □

Die Sätze 2 und 4 führen die Pol-Polaren-Beziehung am Dreieck auf die Pol-Polaren-Beziehung an Kegelschnitten zurück:
1. Deutung: Betrachtet man zu einem Punkt P die Konjugation, die P mit dem Schwerpunkt vertauscht, und dazu den Umkegelschnitt, der sich als Bild der Ferngeraden bei dieser Konjugation ergibt, so ist die Polare von P bzgl. dieses Kegelschnitts die Tripolare von P bzgl. des Bezugsdreiecks.
2. Deutung: Betrachtet man einen Punkt P als Brianchon-Punkt eines Berührkegelschnitts, so ist die Polare von P bzgl. dieses Kegelschnitts die Tripolare von P bzgl. des Bezugsdreiecks.

Natürlich kann die Tripolare eines Punktes $P(u:v:w)$ auch als Polare eines Punktes Q bzgl. des Umkreises des Bezugsdreiecks angesehen werden, wohl die elementarste Pol-Polaren-Beziehung in diesem Zusammenhang. Dabei ist die Tripolare des Lemoine-Punktes auch seine Polare bzgl. des Umkreises. Allgemein ist die Tripolare eines Punktes P die Umkreis-Polare des Punktes

$$\begin{aligned} Q(&a^2(-a^2vw+b^2wu+c^2uv)\\ &:b^2(a^2vw-b^2wu+c^2uv)\\ &:c^2(a^2vw+b^2wu-c^2uv)). \end{aligned}$$

Für die bekanntesten Dreieckspunkte ergibt sich dazu folgende Zuordnung:

Tripolare von ...	Umkreis-Polare von ...
Inkreismitte I=X(1)	X(55)
Schwerpunkt S=X(2)	X(3)
Umkreismitte M=X(3)	X(154)
Höhenschnitt H=X(4)	X(25)
Lemoine-Punkt L=X(6)	X(6)
Nagel-Punkt N=X(8)	X(197)
Mittenpunkt O=X(9)	X(198)
Spieker-Punkt X(10)	X(199)
Steiner-Punkt X(99)	X(669)

Tripolaren und Tripole erweisen sich häufig als nützlich, geometrische Zusammenhänge übersichtlich anzusprechen. So liegen z.B. die Mitten gleichseitiger einbeschriebener Dreiecke auf den Tripolaren der Fermat-Punkte.

Literatur:

[1] E. W. Weisstein. „Trilinear Polar“.
From MathWorld – A Web Resource.
http://mathworld.wolfram.com/TrilinearPolar.html.

[2] C. Kimberling: Encyclopedia of Triangle Centers. – http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html.

Eckart Schmidt - Hasenberg 27 - D 24223 Raisdorf
http://eckartschmidt.de
eckart_schmidt@t-online.de